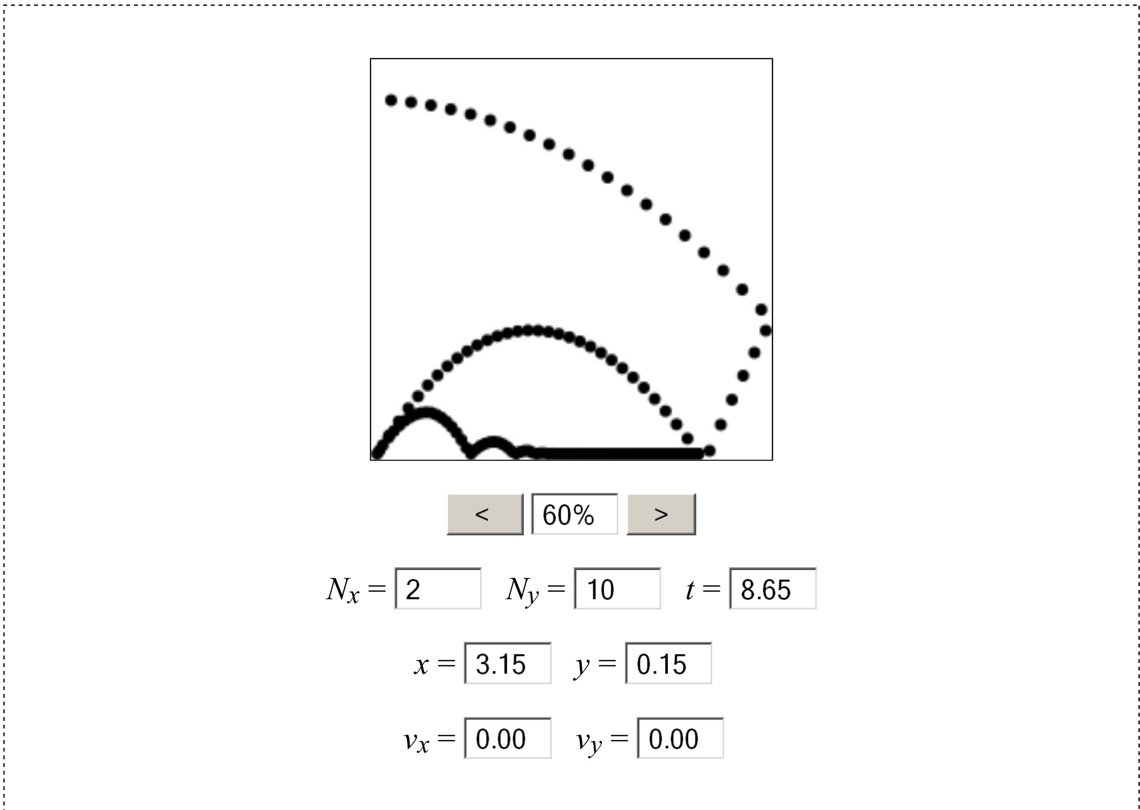
# 31 Bola quicando

O exemplo a seguir simula o lançamento de uma bola em uma espécie de caixa. A bola é lançada horizontalmente com uma certa velocidade e segue até bater na parede ou no chão da caixa. O movimento na direção horizontal é retardado com uma aceleração constante e igual a 5% da aceleração da gravidade enquanto a bola "voa" e também quando escorrega pelo chão (numa simulação mais realista, a aceleração provocada pela resistência do ar não seria constante e o movimento de rotação da bola deveria ser levado em conta). Na direção vertical é levada em consideração apenas a aceleração da gravidade. Quando bate em alguma superfície (parede ou chão), a bola perde uma fração da sua energia cinética devido ao fator de restituição elástica do sistema bola-superfície. O movimento horizontal continua até que a velocidade horizontal seja nula e o movimento vertical, que tecnicamente seria infinito, continua até que a energia seja uma certa fração da energia original.



O movimento da bola entre duas colisões poderia ser descrito pela equação do movimento retilíneo uniformemente variado para as duas direções, cada uma com sua própria aceleração:

$$x(t) = x_o + v_{xo}\, t + \tfrac{1}{2}\, a_x\, t^2$$
$$y(t) = y_o + v_{yo}\, t + \tfrac{1}{2}\, a_y\, t^2$$

Entretanto, devido à presença das colisões, seria muito inconveniente implementar a simulação utilizando estas equações. Uma outra opção muito mais conveniente, apesar de não tão precisa, é realizar a integração numérica das equações diferenciais para o movimento. A aceleração é a taxa de variação da velocidade no tempo:

$$\Delta v/\Delta t = a$$

E portanto:

$$\Delta v = a\, \Delta t$$

Se chamamos de $v_i$ a velocidade num determinado instante de tempo $t$ e de $v_{i+1}$ a velocidade em $t + \Delta t$, esta pode ser escrita em função daquela como:

$$v_{i+1} = v_i + \Delta v$$
$$v_{i+1} = v_i + a\, \Delta t$$

Do mesmo modo, considerando que a velocidade é a taxa de variação do espaço:

$$\Delta x/\Delta t = v$$
$$\Delta x = v\, \Delta t$$

Se chamamos de $x_i$ a posição num determinado instante de tempo $t$ e de $x_{i+1}$ a posição em $t + \Delta t$, obtemos:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$
$$x_{i+1} = x_i + v\, \Delta t$$

As equações exatas para o movimento são obtidas quando aplicamos a este raciocínio as regras do cálculo integral e diferencial, que essencialmente fazem com que os intervalos $\Delta x$, $\Delta v$ e $\Delta t$ sejam muito pequenos (infinitesimais). Ao realizarmos a integração numericamente, temos que utilizar algum tamanho finito para os intervalos, o que introduz erros que vão se propagando à medida que a integração prossegue. Felizmente, para fins didáticos e para muitos fins práticos, esses erros frequentemente podem ser ignorados. Mesmo porque, para a vasta maioria dos problemas científicos e tecnológicos estudados atualmente, as equações de movimento não podem ser obtidas analiticamente e a sua solução passa necessariamente por métodos numéricos.

Existem diversas maneiras de realizar a integração numérica. No exemplo da bola quicando, utilizamos o mais primitivo e intuitivo deles, conhecido como método de Euler, que implementa exatamente as equações de diferenças finitas descritas acima. No capítulo seguinte será utilizado o método de Runge-Kutta de 4a. ordem, que é muito mais preciso e robusto, mas com um custo computacional bem mais alto.

A listagem a seguir mostra alguns aspectos essenciais da simulação da bola quicando. Na listagem não estão incluídas as estruturas que geram as caixas de texto para escolha do fator de restituição elástica e apresentação dos valores da posição, da velocidade e do número de colisões em cada direção, bem como do tempo total da trajetória.

exemplo-31-1.html

```
<p>
<div align="center">
<canvas id="cnv" style="border: 1px solid;"
           width="200" height="200">
</canvas>
</div>
</p>

<script>

var wxi = -5;       // limite inferior dos x
var wxf = 5;        // limite superior dos x
var wyi = 0;        // limite inferior dos y
var wyf = 10;       // limite superior dos y
var x = wxi;        // posição x
var y = 9;          // posição y
var vy = 0          // velocidade na direção x
var vx = 10;        // velocidade na direção x
var dt = 0.05;      // intervalo de tempo
var g  = -10;       // valor da aceleração da gravidade
var ax = g/20;      // aceleração na direção x
var ay = g;         // aceleração na direção y
var sentidox =  1; // indicador do sentido de movimento
var sentidoy = -1; // indicador do sentido de movimento
var raio = 0.15;    // raio da bola
var red = 0.6;      // redução da velocidade a cada colisão
var totredx = 1;    // redução total na direção x
var totredy = 1;    // redução total na direção y
var limred = 0.01; // limite para redução (condição de parada)
var horFim = 0;     // indicador de fim na direção horizontal
var verFim = 0;     // indicador de fim na direção vetical

function fixCoords(lctx,cw,ch,xmin,xmax,ymin,ymax) {
   var m11 = cw/(xmax-xmin);
   var m12 = 0;
   var m21 = 0;
   var m22 = ch/(ymin-ymax);
   var dx  = - cw*xmin/(xmax-xmin);
   var dy  = - ch*ymax/(ymin-ymax);
   lctx.transform(m11,m12,m21,m22,dx,dy);
   var esp = Math.max(m11,m22);
   lctx.lineWidth = 1/esp;
}

function passoBola() {

   vx = vx + ax * dt;
   x  = x + vx * dt;

   vy = vy + ay * dt;
   y  = y + vy * dt;

   // bateu na parede da esquerda
   if (x <= (wxi+raio)) {
      sentidox = -sentidox;
      x = wxi + raio;
```

```
        totredx = totredx * red;
        vx = -red*vx;
        ax = -ax;
        }

    // bateu na parede da direita
    if (x >= (wxf-raio)) {
        sentidox = -sentidox;
        x = wxf - raio;
        totredx = totredx * red;
        vx = -red*vx;
        ax = -ax;
        }

    // bateu no chão
    if (y <= raio) {
        sentidoy = -sentidoy;
        y = raio;
        totredy = totredy * red;
        vy = -red*vy;
        }

    // atingiu o máximo da trajetória
    if ((sentidoy>0)&&(vy<=0)) {
        sentidoy = -sentidoy;
        vy = g * dt;
    }

    // movimento horizontal terminou
    if ((vx<0)&&(sentidox>0)||(vx>0)&&(sentidox<0)) {
        ax = 0;
        vx = 0;
        horFim = 1;
    }

    // movimento vertical terminou
    if (totredy<limred) {
        vy = 0;
        verFim = 1;
    }

    if ((horFim)&&(verFim)) {
        y = raio;
        clearInterval(intervalo);
    }

    ctx.beginPath();
    ctx.arc(x,y,raio,0,2*Math.PI,true);
    ctx.fill();
}

var ctx = document.getElementById('cnv').getContext('2d');
fixCoords(ctx,200,200,wxi,wxf,wyi,wyf);
var intervalo = setInterval("passo()",100);

</script>
```

## Exercícios

1. Acrescente ao exemplo estruturas e código para implementar os elementos de interatividade com o usuário, que são:

a. caixa de texto com o valor do coeficiente de restituição elástica;
b. botões de controle do valor do coeficiente de restituição elástica (aumentam e diminuiem o valor em 10%, por exemplo);
c. caixas de texto com o número de colisões nas direções $x$ e $y$;
d. caixa de texto com o tempo decorrido;
e. caixas de texto com as posições $x$ e $y$ e as velocidades $v_x$ e $v_y$ da bola ao longo da trajetória.

2. Modifique o script de modo a fazer com que tanto na direção $x$ quanto na direção $y$ haja uma força (e consequentemente uma aceleração) que dependa linearmente da velocidade, como é o caso da força de arrasto ($F_{ar} = -kv$, $a = -(k/m)v$).

3. Faça um script que compare os valores da solução analítica exata com os de uma integração numérica utilizando o método de Euler para os valores da posição de um objeto em queda livre. A tabela a seguir ilustra o caso para um objeto lançado de uma altura $y = 5$ m com a posição computada a cada 0.1 s até que atinja o solo.

| $t$ (s) | $y_{ana}$ (m) | $y_{num}$ (m) |
|---|---|---|
| 0.10 | 4.950 | 4.900 |
| 0.20 | 4.800 | 4.700 |
| 0.30 | 4.550 | 4.400 |
| 0.40 | 4.200 | 4.000 |
| 0.50 | 3.750 | 3.500 |
| 0.60 | 3.200 | 2.900 |
| 0.70 | 2.550 | 2.200 |
| 0.80 | 1.800 | 1.400 |
| 0.90 | 0.950 | 0.500 |
| 1.00 | 0.000 | -0.500 |

4. Faça gráficos do erro entre a posição calculada analiticamente e numericamente à medida que o tempo passa, para diversos valores de $\Delta t$.