23 Cliques no detetor

Imagine que queiramos simular a sequência de "cliques" de um detetor medindo os decaimentos de uma amostra com N nuclídeos radioativos que decaem com uma constante de decaimento λ. Ocorrendo um "clique", quanto tempo depois fazemos soar o próximo? E o próximo? E o próximo?

Esta é uma situação em que precisaremos de um gerador de números aleatórios que retorne números que não obedecem a uma distribuição uniforme de probabilidade, mas sim à lei específica do decaimento radioativo. Essa lei diz que a probabilidade de que o tempo de espera entre dois decaimentos sucessivos esteja entre t e $t + dt$ é dada por uma distribuição exponencial:

$$p(t)\, dt = \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$$

onde λ é a constante de decaimento do nuclídeo, relacionada à sua meia-vida por $\lambda = \ln 2/T_{½}$.

Note que este problema parece bastante semelhante ao do decaimento radioativo mas, apesar do fenômeno abordado ser o mesmo, a medida é diferente: naquele, a lei exponencial regia o número de nuclídeos radioativos na amostra; neste, a lei exponencial rege a probabilidade de ocorrer um decaimento radioativo após um determinado intervalo de tempo.

Podemos utilizar um gerador com uma distribuição uniforme para resolver este problema. Uma distribuição uniforme de probabilidades é aquela em que a probabilidade de se gerar um número entre x e $x + dx$, denotada por, é dada por:

$$p(x)\, dx = dx$$

para $0<x<1$ e 0 para qualquer outro intervalo. A distribuição de probabilidade $p(x)$ é normalizada (ou seja, a probabilidade de gerar *qualquer número* é 1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$$

Se geramos um número aleatório x e o utilizamos para calcular o valor de uma função $y(x)$, a distribuição de probabilidade de y, denotada por $p(y)dy$, pode ser obtida com a lei fundamental da transformação das probabilidades:

$$|p(y)dy| = |p(x)dx|$$

ou:

$$p(y) = p(x)\ |dx/dy|$$

No exemplo do decaimento radioativo, $y \equiv t$, de modo que:

$$|dx/dy| = |dx/dt| = \lambda\ e^{-\lambda t}.$$

Integrando essa equação (esqueça o módulo, ele está aí para lembrá-lo de jogar fora sinais negativos — probabilidades são sempre positivas!), obtemos:

$$x = \int \lambda\ e^{-\lambda t}\ dt = e^{-\lambda t}$$

Invertendo essa equação, obtemos t em função de x:

$$t = -\ (1/\lambda)\ \ln x$$

Desta maneira, geramos um número aleatório x que obedece uma distribuição uniforme e o utilizamos para calcular um número aleatório t que obedece uma distribuição exponencial.

Vamos imaginar agora que temos uma fonte de ^{137}Cs, com uma meia-vida de cerca de 30 anos e uma constante de decaimento $\lambda = \ln 2/T_{½} = 0{,}023$ ano^{-1} = $7{,}3 \times 10^{-10}$ s^{-1}. Vamos imaginar ainda que essa fonte tenha uma atividade de 1 μCi = $3{,}7 \times 10^4$ decaimentos por segundo, tipicamente encontrada em laboratórios didáticos de Física Moderna. Sabendo que o número N de nuclídeos radioativos na amostra está relacionado à sua atividade por $N = A/\lambda$, obtemos $N = 5{,}1 \times 10^{13}$ nuclídeos.

Sorteamos um número aleatório x que obedece uma distribuição uniforme, por exemplo x = 0,25, o que corresponde a um tempo de espera $t = -\ (1/\lambda)\ \ln x$ = 60,3 anos = $1{,}9 \times 10^9$ segundos. Isto significa que, se tivéssemos apenas 2 nuclídeos na amostra, teríamos que esperar (probabilisticamente falando) todo este tempo para emitir outro "clique". Como temos $5{,}1 \times 10^{13}$, vamos ter que esperar apenas $t/N = 37 \times 10^{-6}$ s = 37 μs.

A tabela abaixo mostra uma sequência estatisticamente realista de intervalos de tempo entre decaimentos do ^{137}Cs na amostra considerada. Na primeira linha, estão os valores de x sorteados segundo uma distribuição uniforme; na segunda linha, o valor, em anos, obtido a partir deste sorteio; na terceira linha, a divisão deste valor pelo número de nuclídeos da amostra, levando a um tempo de espera convenientemente expresso em microssegundos.

x	0.518	0.037	0.172	0.193	0.988	0.656	0.288	0.035	0.503	0.669
***t* (anos)**	28.635	143.903	76.429	71.580	0.543	18.334	54.114	145.468	29.838	17.482
***t*/*N* (μs)**	17.706	88.983	47.260	44.262	0.336	11.337	33.462	89.951	18.451	10.810

O script abaixo implementa a função `exprand()`, que retorna um número aleatório segundo uma distribuição exponencial. A seguir, utiliza esta função para gerar alguns milhares de números e construir a distribuição de probabilidades para o caso do tempo de espera, dado em anos, entre decaimentos sucessivos do ^{137}Cs. Nos capítulos seguintes, veremos como utilizar este método para gerar números aleatórios que obedecem a uma distribuição gaussiana, muito útil para simulações, ou que obedecem a uma distribuição totalmente arbitrária, definida por um conjunto de dados experimentais.

exemplo-23-1.html

```
<script>
// Gerador de números aleatórios - exponencial
function exprand() {
   return -Math.log(Math.random());
}

// Cria e preenche a distr de nros. gerados
var ncan = 20;
var dist = new Array(ncan);
for (i=0;i<ncan;i++) dist[i] = 0;

var xmin = 0;
var xmax = 200;
var dx = (xmax-xmin)/ncan;

var npts = 5000;

for (var i=0;i<npts;i++) {
   var x = exprand()/0.023;
   for (n=0;n<ncan;n++) {
      if ((x>(xmin+n*dx))&&(x<(xmin+(n+1)*dx))) {
         dist[n]++;
         break;
      }
   }
}

// Faz o gráfico da variável dist em modo texto
// Números na escala. Encontra o maior para usar
// a informação mais adiante, no alinhamento dos nros.
var label = new Array(ncan);
var maxlength = 0;
for (i=0;i<ncan;i++) {
   label[i] = (xmin+i*dx).toFixed(1);
   if (label[i].length>maxlength) maxlength = label[i].length;
}

// Acha o máximo da distribuição e faz com que
// seja representado por 50 asteriscos
var max = 0;
for (n=0;n<ncan;n++)
   if (dist[n]>max) max = dist[n];
var dy = max/50;

document.write("<pre style='font-size:8pt'>");

for (i=0;i<ncan;i++) {
   var nast = Math.round(dist[i]/dy);
   var str = "";
   // preenche de brancos à esquerda do número qdo necessário
   for (j=0;j<(maxlength-label[i].length);j++) str += " ";
   str += label[i] + "  ";
   for (n=0;n<nast;n++) str += "*";
   str += " " + dist[i] + "<br>";
   document.write(str);
}
```

```
document.write("</pre>");
</script>
```

Resultado:

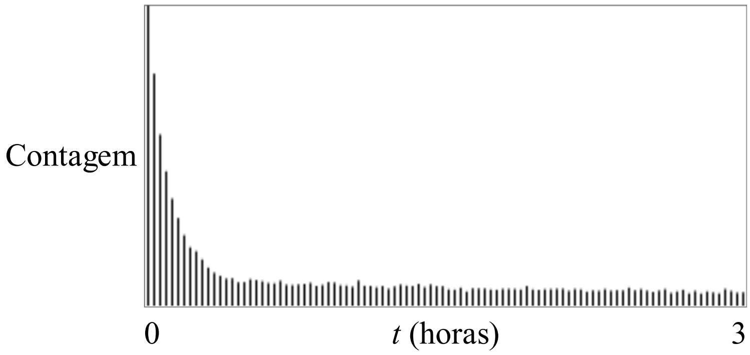
```
  0.0  ************************************************** 1076
 10.0  ************************************** 814
 20.0  ****************************** 637
 30.0  ************************ 519
 40.0  ******************* 411
 50.0  *************** 313
 60.0  ************ 250
 70.0  ******** 168
 80.0  ******** 166
 90.0  ****** 121
100.0  ***** 103
110.0  **** 96
120.0  *** 69
130.0  *** 58
140.0  ** 40
150.0  * 30
160.0  * 29
170.0  * 18
180.0  * 17
190.0  * 15
```

A distribuição é armazenada no array `dist`, que tem 20 elementos ou canais. Cada elemento funciona como um acumulador e portanto deve ser inicializado com 0, o que é feito com o laço `for`. As variáveis `xmin`, `xmax` e `dx` definem os limites inferior e superior da distribuição (0 e 200 anos, no caso), e o intervalo de abrangência de cada canal, dado pela largura total da distribuição dividida pelo número de canais. O número de dados sorteados é definido pelo conteúdo da variável `npts`.

O laço `for` é repetido `npts` vezes e, a cada vez, um valor `x` que obedece a distribuição exponencial é gerado e dividido pelo valor de λ, em anos, como prescrito pelo método. É então necessário verificar em que canal deve "cair" o valor retornado por `exprand()`, o que é feito pelo laço `for` que percorre os canais. Quando o canal é encontrado, o conteúdo do canal é incrementado e o laço é interrompido pelo comando `break`, pois seria desperdício de tempo continuar o laço, uma vez que o canal já está definido.

Exercícios

1. Qual seria a distribuição temporal de 10000 cliques em um detetor medindo uma amostra contaminada com dois materiais radioativos diferentes, um com meia-vida de 0.1 horas e outro com meia-vida de 5 horas, sendo que o segundo material está presente em uma proporção quatro vezes maior que o primeiro?



Observe que a distribuição tem uma rápida queda em função da pequena meia-vida de um dos materiais e uma longa "cauda" devida à longa meia-vida do outro contaminante.

2. Implemente, na forma de um objeto, o gerador de números aleatórios que obedecem a uma distribuição exponencial. Uma possível maneira de definir e utilizar esse objeto seria:

```
function EXPRAND(lambda) {
}

EXPRAND.prototype.random = function() {
}

var expRand = new EXPRAND(0.023);

for (var i=0;i<npts;i++) {
   var x = expRand.random();
   ...
}
```

3. Implemente um gerador de números aleatórios que retorne ângulos entre 0 e $\pi/2$ cuja probabilidade de sorteio obedeça uma função cosseno. Esta é, por exemplo, a probabilidade de deteção de raios cósmicos na superfície da Terra, pois para ângulo baixos a espessura de atmosfera a ser atravessada é grande, o que reduz a probabilidade de deteção. Para ângulos próximos de 90 graus, a espessura de atmosfera atravessada é mínima, o que maximiza a deteção.