15 Lançamento Oblíquo

O lançamento oblíquo é um movimento bidimensional caracterizado por uma posição de lançamento (x_o, y_o), um ângulo de lançamento θ com a horizontal e uma velocidade de lançamento de módulo v_o. O movimento na direção horizontal (direção x) é retilíneo uniforme (MRU) e o movimento na direção vertical (direção y) é uniformemente variado (MRUV) devido à força da gravidade. A equação de movimento para o lançamento oblíquo pode ser escrita como:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

onde

$$x(t) = x_o + v_{xo}\,t$$
$$y(t) = y_o + v_{yo}\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

onde x_o e y_o são as coordenadas do ponto de lançamento, $v_{xo} = v_o \cos\theta$, $v_{yo} = v_o \sin\theta$ as componentes da velocidade inicial e a a aceleração, no caso a da gravidade.

A velocidade em qualquer instante é dada por

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j}$$

onde

$$v_x(t) = v_{xo}$$
$$v_y(t) = v_{yo} + a\,t$$

O script abaixo calcula a posição e a velocidade do objeto desde o ponto de lançamento até o momento em que toca o solo novamente.

exemplo-15-1.html

```
<script>
var xo = 0;  // coordenada x de lançamento, em metros
var yo = 1;  // coordenada y de lançamento, em metros
var vo = 10; // módulo da velocidade de lançamento, em m/s
```

```
var theta = 45 * Math.PI / 180; // ângulo de lançamento, em rad
var vxo = vo * Math.cos(theta); // velocidade inicial na direção x
var vyo = vo * Math.sin(theta); // velocidade inicial na direção y
var a = -9.8; // aceleraçao, em m/s2
var t = 0; // tempo em segundos
var dt = 0.2; // intervalo de tempo entre cálculos sucessivos
document.write("<pre>");
document.write("t(s)   x(m)   y(m)");
document.write("<br>");
do {
    var x = xo + vxo * t;
    var y = yo + vyo * t + a * Math.pow(t,2) / 2;
    document.write(t.toFixed(2) + "   " +
                   x.toFixed(2) + "   " + y.toFixed(2));
    document.write("<br>");
    t = t + dt;
} while (y>0);
document.write("</pre>");
</script>
```

Resultado:

```
t(s)   x(m)   y(m)
0.00   0.00   1.00
0.20   1.00   2.54
0.40   2.00   3.68
0.60   3.00   4.43
0.80   4.00   4.79
1.00   5.00   4.76
1.20   6.00   4.34
1.40   7.00   3.52
1.60   8.00   2.31
1.80   9.00   0.71
2.00   10.00   -1.28
```

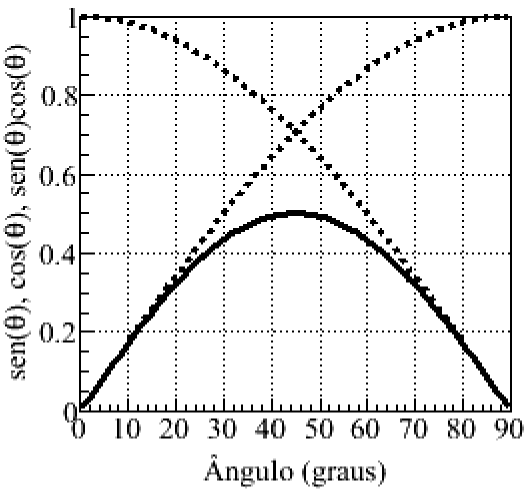
Lembrando que $v_{ox} = v_o\cos\theta$ e $v_{oy} = v_o\text{sen}\theta$, onde v_o é o módulo da velocidade inicial, não é difícil demonstrar que o alcance máximo da partícula na direção x é dado por:

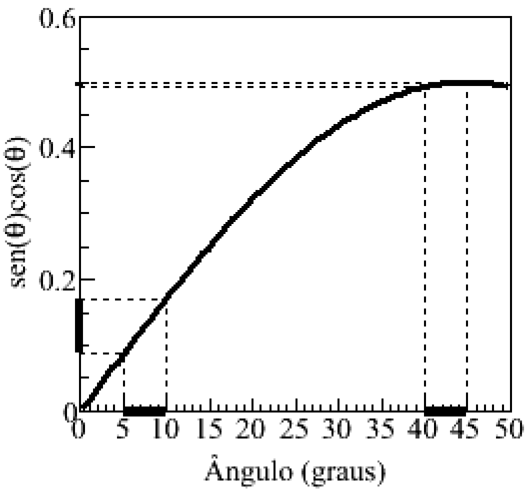
$$x_{\text{máx}} = (2v_o^2/g) \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta$$

A pergunta que queremos responder é: como o alcance máximo é afetado por pequenas variações (incertezas) no ângulo de lançamento? Em outras palavras: imaginemos que o nosso dispositivo lançador não permite que saibamos o ângulo de lançamento com precisão melhor que $\Delta\theta$. Em quanto esta flutuação afeta o alcance? O efeito é o mesmo para todos os ângulos?

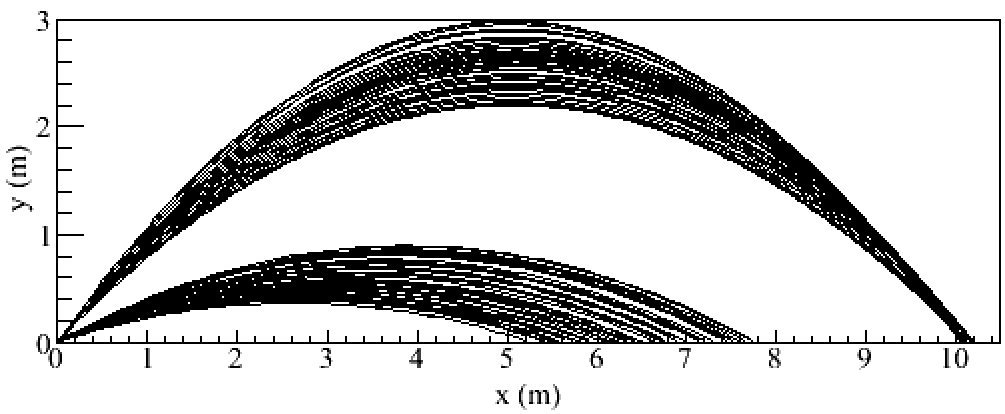
A fórmula para o alcance $x_{\text{máx}}$ nos permite avaliar isto facilmente. Vamos supor um lançamento a partir de $x_o = 0$ e $y_o = 0$, com velocidade $v_o = 10$ m/s. Vamos supor que a flutuação no ângulo de lançamento seja de ± 5°. Os alcances de disparos a 10°, 45° e 80° são, respectivamente, 3,5 m, 10,2 m e 3,5 m. Para disparos a 5°, 40° e 85° os alcances são 1,8 m, 10,0 m e 1,8 m, respectivamente. Assim, uma variação de 5° nos extremos leva a uma variação de 1,7 m no alcance (ou quase 100% do valor do alcance a 10° ou 80°), enquanto a mesma variação de 5° em torno de 45° leva a uma variação de apenas 0,2 m (ou cerca de 2% do valor do alcance a 45°). Apesar do alcance mudar com o valor da velocidade inicial, os *percentuais* não dependem dela.

Isto acontece devido à dependência não linear do alcance com o ângulo. A figura abaixo mostra os gráficos da função seno (linha pontilhada ascendente), cosseno (linha pontilhada descendente) e do produto das duas (linha sólida). A figura mostra claramente que o alcance máximo acontece quando θ = 45°. A figura seguinte mostra o quadrante inferior esquerdo levemente ampliado. Note que um mesmo intervalo angular de 5° leva a valores bem diferentes para o intervalo de alcances, devido à dependência deste com o produto do seno e do cosseno do ângulo.





A figura abaixo mostra as trajetórias das partículas lançadas com uma dispersão uniforme de ±5° em torno de 20° e em torno de 45°. Note como para 45° a dispersão em *y* é grande no ponto mais alto das trajetórias.



É possível chegar à relação precisa entre a variação do ângulo e a variação do alcance derivando a equação deste com relação àquele:

$$dx/d\theta = (2v_o^2/g) \cdot [\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)] = (2v_o^2/g) \cdot \cos(2\theta)$$

e portanto:

$$\Delta x = (2v_o^2/g) \cdot \cos(2\theta) \cdot \Delta\theta$$

que é máximo quando θ = 0° e mínimo (na verdade nulo!) quando θ = 45°.

Em situações em que não é possível obter as equações de movimento, pode ser conveniente simular o lançamento do objeto centenas de vezes "flutuando" aleatoriamente o ângulo de lançamento e registrando o alcance em cada caso.

Exercícios

1. Modifique o script acima para que faça uma centena de lançamentos para ângulos em torno de 10° com uma flutuação uniforme de ±5°, depois em torno de 20° com a mesma flutuação e assim por diante, até 80°. A partir dos valores registrados, calcule o *desvio quadrático médio* d_{rms} (o índice "rms" remete a *root mean square*), uma medida frequentemente utilizada da dispersão de uma grandeza em torno do seu valor médio:

   $$d_{\text{rms}} = (1/N) \cdot \Sigma_i \, (x_i - x_{\text{méd}})^{1/2}$$

   Você deve obter os seguintes resultados:

   ```
   angulo   rms    alcance   rms     %
    9.94   0.30      3.50   0.10   2.8
    20.2   0.28      6.64   0.08   1.1
    29.9   0.27      8.83   0.05   0.5
    40.0   0.29      10.0   0.02   0.2
    50.1   0.28      10.0   0.02   0.2
    59.8   0.27      8.86   0.05   0.5
    70.0   0.29      6.54   0.08   1.2
    79.7   0.29      3.59   0.10   2.7
   ```

   Note que o desvio quadrático médio associado ao ângulo é aproximadamente o mesmo (cerca de 0,3°), enquanto o desvio quadrático médio associado ao alcance começa alto para θ~10°, atinge um mínimo para θ~45° e volta a crescer na direção de θ~80°, como antecipado pelos cálculos analíticos.

   Uma solução seria declarar dois objetos `Array` para armazenar os valores do ângulo de lançamento e do alcance para os *N* lançamentos em torno de cada ângulo, pois só é possível calcular o desvio quadrático médio *após* saber a média. Você também pode utilizar três estruturas de repetição aninhadas: um laço `for` para varrer os ângulos de referência (10°, 20°, ..., 80°); outro laço `for` para varrer os 100 lançamentos para cada ângulo de referência e um laço `do { ... } while (condição)` que acompanha a trajetória até o objeto atinja o chão.

2. Diminua e aumente o valor de *N* e veja seu efeito sobre o desvio quadrático médio. Faça um gráfico da dependência de d_{rms} com *N*.

3. O que aconteceria com os desvios médios se não fossem quadráticos ($d = \Sigma_i \, (x_i - x_{\text{méd}})$)?.